TUTORATO ALGEBRA LINEARE - 24/04/25

CORREZIONE ESERCIZI DEL FOGLIO 4

Esercizio 1. Sia W il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\2\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Al variare del parametro k, trovare la dimensione e una base del sottospazio ortogonale $W^\perp$.

Soluzione

$\dim W^\perp = 3 - \dim W \quad , \quad 2 \le \dim W \le 3$

i primi due vettori sono linearmente indipendenti

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1 & k\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix} = -2 + 6k - 4 = 6(k-1)$$

Se $k=1$, allora le colonne sono lin. DIPENDENTI $\rightsquigarrow \dim W = 2$

Se $k\neq 1$, allora le colonne sono lin. INDIPENDENTI $\rightsquigarrow \dim W = 3$ $\to W = \mathbb{R}^3$

Quindi

$$\dim W^\perp = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k=1 \\ 0 & , \text{ se } k\neq 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ la base è (convenzionalmente) data dall'insieme vuoto

$k=1)$ $\quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right).$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ generico

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 2y - z$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right\rangle = x + 3z$$

$W^\perp$ è dato dal sistema $\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + 3z = 0\end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = -3z = -6y\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6y\\y\\2y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-6\\1\\2\end{pmatrix}$$

quindi $W^\perp = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-6\\1\\2\end{pmatrix}\right).$

Altra strada: (per $k=1$)

Trovo un'equazione cartesiana per W

si ottiene imponendo che il rango di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 3 & z \end{pmatrix}$$

sia 0 (Gauss oppure $\det = 0$)

svolgendo i calcoli, si trova $\quad -6x + y + 2z = 0$, cioè

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -6x + y + 2z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

W è il sottospazio dei vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$= \left(\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right)^{\perp}$$

Posto $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, si ha $W = U^{\perp}$, quindi

$$W^{\perp} = (U^{\perp})^{\perp} = U.$$

Esercizio 2. Trovare una base ortonormale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 4y + 2z = 0 \right\}.$$

Soluzione

1. Troviamo una base di W.

$$3x = 4y - 2z \rightsquigarrow x = \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z$$

Il generico vettore di W è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3\, y - 2/3\, z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3\, y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3\, z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_2} \right).$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

2. La ortonormalizziamo con Gram-Schmidt.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle u_1, u_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 4^2 + 3^2 = 5^2$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-8}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 32/25 \\ 24/25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18/25 \\ 24/25 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base ortogonale di W. Una base ORTONORMALE di W è data da $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\}$, $\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{u_2}{\|u_2\|} = \overset{\text{calcoli...}}{\ldots} = \frac{1}{15\sqrt{29}} \begin{pmatrix} -18 \\ 24 \\ 75 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare lo spazio ortogonale $W^\perp$ e trovarne una base. ORTONORMALE

Soluzione

Ricetta: $W^\perp$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_4 = -2x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_2 - x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$W^\perp = \text{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_2} \right).$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}}\, v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\underbrace{\cancel{\langle u_1, u_1 \rangle}}_{=1}}\, u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}_{2/3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \left\langle v_2, \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle v_2, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2$$

[OSS. $\langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle v_2, v_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{3} v_1 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$]

$$\|u_2\|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(4 + 9 + 4 + 16\right) = \frac{33}{9} \qquad \frac{11}{3}$$

Una base ortonormale di $W^\perp$ è data da $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11/3}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$

Esercizio 4. Trovare basi ortonormali di autovettori delle seguente matrici simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u> (matrice A)

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 2 & 0 \\ 2 & 7-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t) \det \begin{pmatrix} 4-t & 2 \\ 2 & 7-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)\left[(4-t)(7-t) - 4\right]$$

$$= (1-t)(t^2 - 11t + 24)$$

$$= (1-t)(t-8)(t-3) \rightsquigarrow \text{Autovalori: } 1, 3, 8$$

Autovettori:

$\lambda = 1$)

$$A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \cancel{3y} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

$$V_1 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$\lambda = 3$)

$$A - \lambda I = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Updownarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$V_3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\lambda = 8$)

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -7z = 0 \end{cases} \Updownarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$V_8 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per A è data da

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{ortogonali}\\(-2+2=0)}}$$

Si vede "a mano" che questi sono tra loro ortogonali.

Un Teorema non visto afferma che, per una matrice simmetrica, gli autovettori relativi ad autovalori DISTINTI sono ortogonali:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori, $\begin{matrix} v_1 \in V_{\lambda_1} \\ v_2 \in V_{\lambda_2}\end{matrix} \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

NON USATELO ALL'ESAME !!!

Una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per A è data da

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

<u>Soluzione</u> (matrice B) [TUTORATO DEL 30/04/25]

$$P_B(t) = \det\begin{pmatrix}2-t & 0 & 1\\ 0 & 3-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t\end{pmatrix} = (3-t)\det\begin{pmatrix}2-t & 1\\ 1 & 2-t\end{pmatrix} = (3-t)\left((2-t)^2-1\right)$$
$$= (3-t)(1-t)(3-t)$$

$\rightsquigarrow$ Autovalori 1, 3

m_{alg} 1, 2

Autovettori:

$\lambda = 1)$

$$B - I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=0\end{cases}$$

$V_1 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$

$\lambda = 3)$

$$B - 3I = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -x+z=0 \\ y,z \text{ libere}\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$V_3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$ Notare che $\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0.$

ortogonali

ortogonali

$\rightsquigarrow$ Come prima, una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per B è data da $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$

Una base ORTONORMALE è quindi data da: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$

Esercizi "per casa" (Tratti dallo scritto del 02/09/24)

Esercizio 1. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il sottospazio W generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

.

Sia $V^\perp$ il sottospazio ortogonale di V per il prodotto scalare standard (stessa notazione per W).

(1) Calcolare la dimensione del sottospazio $V^\perp \cap W$.

(2) Calcolare la dimensione del sottospazio $V^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $v \mapsto Av$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ dove la matrice di ϕ diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

Se sì, trovare tale base, se no, scrivere NO nel riquadro e motivare la risposta sul foglio.

(2) Stessa domanda con la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$